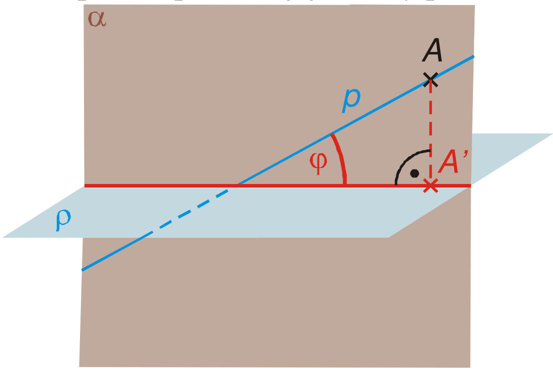
5.2.7 Odchylka přímky a roviny

Předpoklady: 5202, 5206

Jak odchylka přímky a roviny?
Co by měla definice splňovat:
- podobně jako u ostatních věcí ji musíme převést na něco, co už umíme (asi odchylku dvou přímek),
- měla by být jednoznačná,
- měla by dávat očekávané výsledky u „jasných" případů (přímka rovnoběžná a kolmá k rovině).

$\Rightarrow$ K přímce přidáme její kolmý průmět do roviny a určíme odchylku těchto přímek.

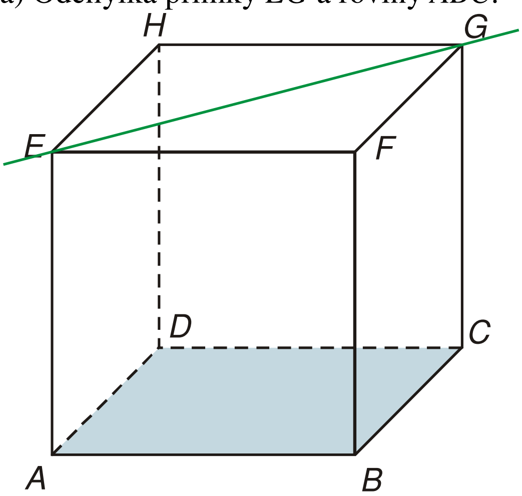


Selže někdy tento postup?
Když je přímka kolmá k rovině, jejím průmětem je pouze bod $\Rightarrow$ nepůjde to spočítat přes odchylku přímek $\Rightarrow$ odchylku musíme stanovit přímo.

Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny.
Je-li přímka kolmá k rovině, je její odchylka $90°$.

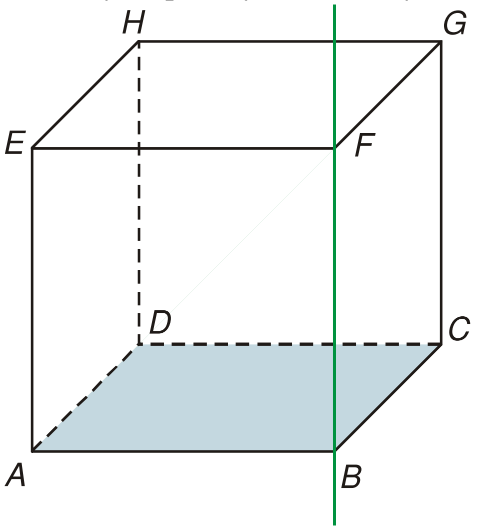
Př. 1: Je dána standardní krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku:
a) přímky *EG* a roviny *ABC*,
b) přímky *FB* a roviny *ABC*,
c) přímky *AF* a roviny *ABC*.

a) Odchylka přímky *EG* a roviny *ABC*.



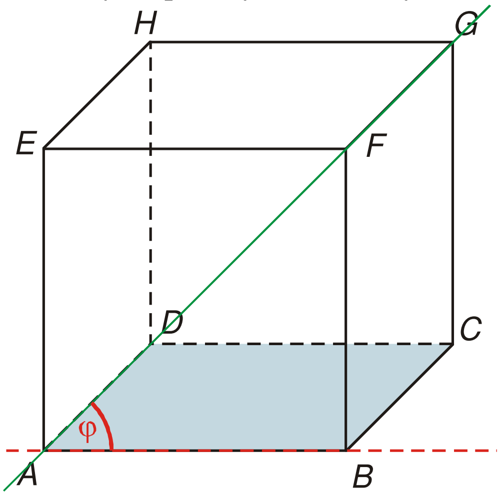
Přímka *EG* leží v rovině *EFG*, která je rovnoběžná s rovinou *ABC* $\Rightarrow$ přímka *EG* je rovnoběžná s rovinou *ABC* $\Rightarrow$ odchylka přímky *EG* od roviny *ABC* je $0°$.

b) Odchylka přímky *FB* a roviny *ABC*.



Přímka *FB* je kolmá k rovině $\Rightarrow$ odchylka přímky *FB* od roviny *ABC* je $90°$.

c) Odchylka přímky *AF* a roviny *ABC*.



Kolmým průmětem přímky *AB* do roviny *ABC* je přímka *AB* $\Rightarrow$ odchylka přímek *AF* a *AB* je $45°$ $\Rightarrow$ odchylka přímky *AF* od roviny *ABC* je $45°$.

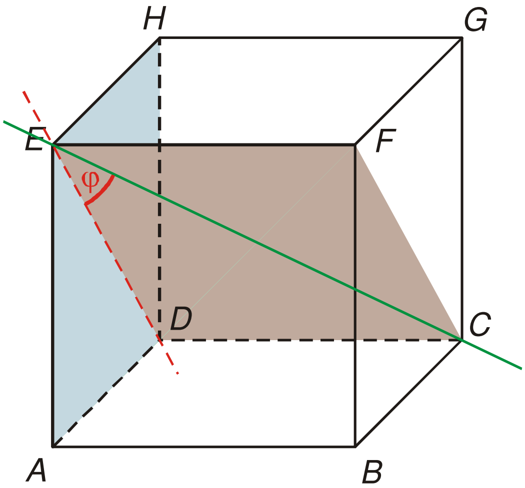
Pedagogická poznámka: Všechny body předchozího příkladu by studenti měli vyřešit zpaměti bez pomoci obrázků.

Odchylka přímky od roviny (tedy odchylka přímky od jejího kolmého průmětu do této roviny) je rovna nejmenší odchylce přímky od libovolné přímky v rovině.

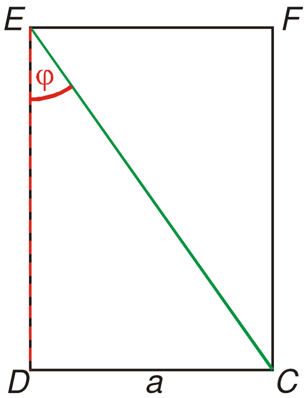
Pedagogická poznámka: Předchozí poznámku je dobré demonstrovat pomocí modelu v Carbi3D.

Př. 2: Je dána standardní krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku:
a) přímky *EC* a roviny *ADE*, b) přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny *CDG*,
c) přímky $S_{AC}F$ a roviny *ABE*.

a) Odchylka přímky *EC* a roviny *ADE*.



Kolmým průmětem přímky EC do roviny ADE je přímka ED $\Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $CDEF$.



Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku EDC: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|DC|}{|DE|}$.

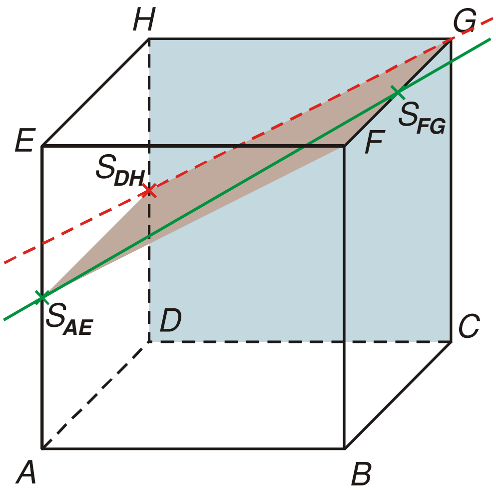
Velikost strany $|ED|$ (úhlopříčka čtverce):

$|ED| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

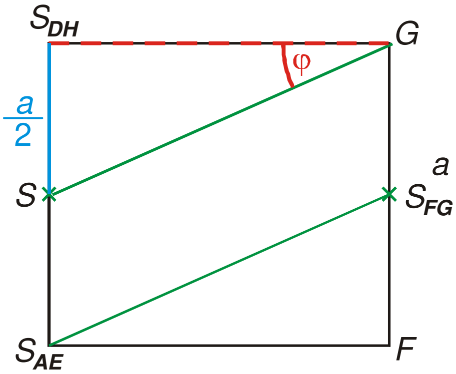
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|DC|}{|DE|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 35°16'$$

Odchylka přímky EC a roviny ADE se rovná $35°16'$.

b) Odchylka přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny CDG.

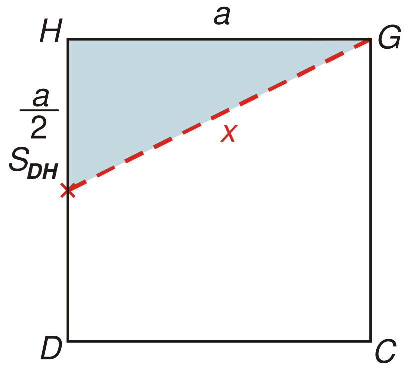


Kolmým průmětem přímky $S_{AE}S_{FG}$ do roviny CDG je přímka $S_{DH}G$ $\Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $S_{AE}FGS_{DH}$.



Velikost strany $|S_{DH}G|$ ze čtverce CDG:

Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku $SS_{DH}G$: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|SS_{DH}|}{|S_{DH}G|}$.



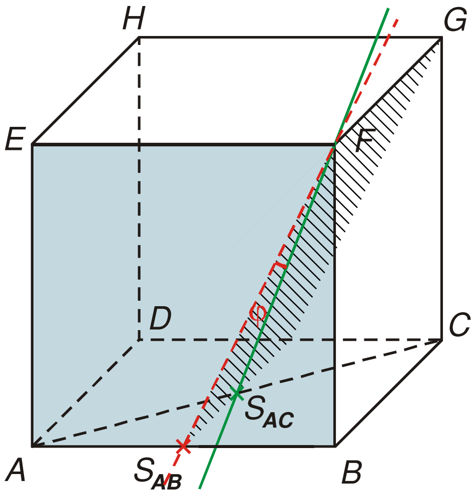
$$|S_{DH}G| = \sqrt{|S_{DH}H|^2 + |HG|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + 4a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

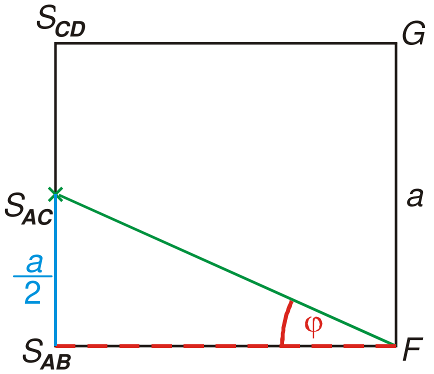
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 24°6'$$

Odchylka přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny CDG se rovná $24°6'$.

c) Odchylka přímky $S_{AC}F$ a roviny ABE.



Kolmým průmětem přímky $S_{AC}F$ do roviny ABE je přímka $S_{AB}F$ $\Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $S_{AB}FGS_{CD}$.

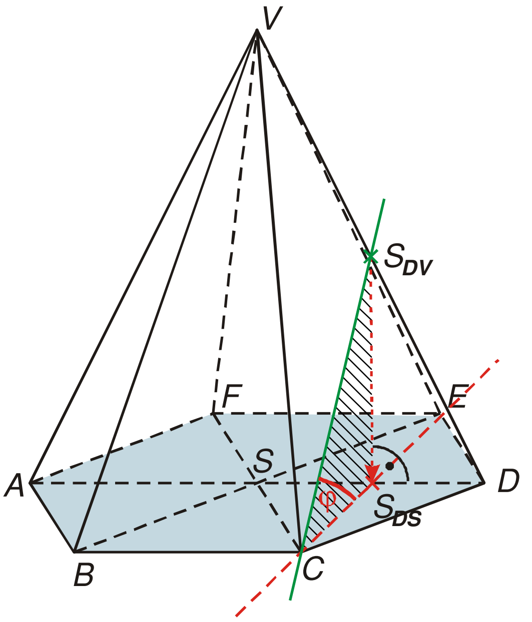


Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku $SS_{DH}G$: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|SS_{DH}|}{|S_{DH}G|}$.

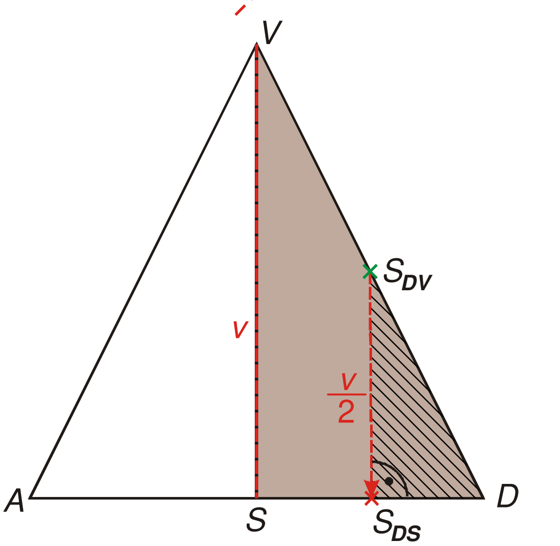
Stejná situace jako v předchozím bodě $\Rightarrow \varphi = 24°6'$.

Odchylka přímky $S_{AC}F$ a roviny ABE se rovná $24°6'$.

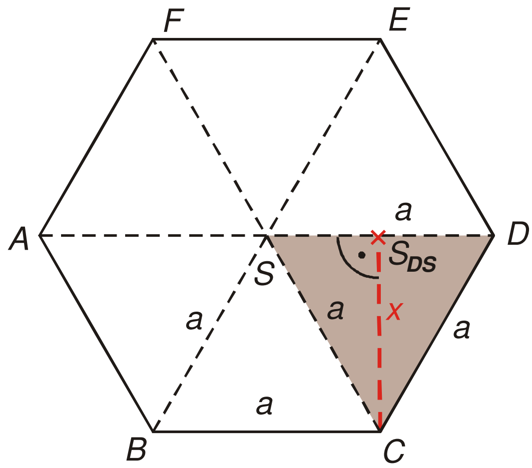
Př. 3: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ se středem podstavy S. Platí: $|AB| = a = 3\,\text{cm}$, $|SV| = v = 5\,\text{cm}$. Urči odchylku přímky CS_{DV} a roviny ABC.



Kolmým průmětem přímky $S_{DV}C$ do roviny ABC je přímka CS_{DS} (S je střed šestiúhelníku $ABCDEF$, kolmým průmětem úsečky DV je úsečka DS) $\Rightarrow$ odchylku určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $CS_{DS}S_{DV}$.

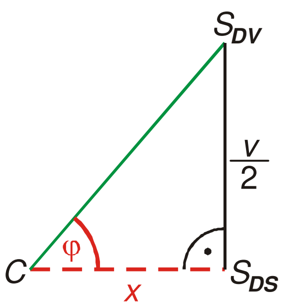


Z podobnosti trojúhelníků DSV a $DS_{DS}S_{DV}$ je vidět, že platí: $|S_{DV}S_{DS}| = \frac{v}{2}$.



Vzdálenost CS_{DS} je také výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou a.

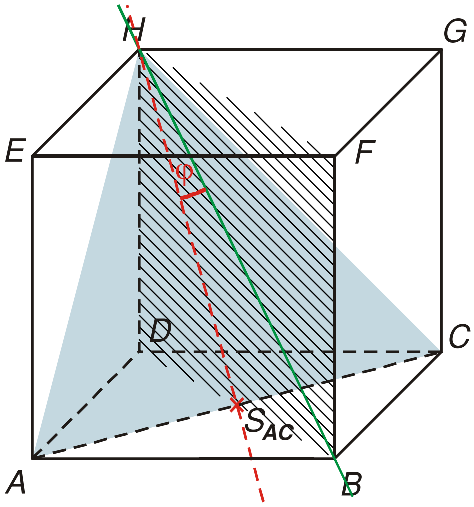
$$x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|S_{DV}S_{DS}|}{|S_{DS}C|} = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{v}{a\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 43°54'$$

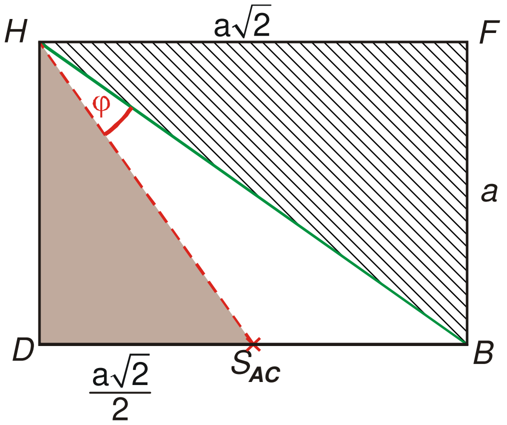
Odchylka CS_{DV} a roviny ABC se rovná $43°54'$.

Př. 4: Je dána standardní krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku přímky *BH* a roviny *ACH*.



Kolmým průmětem přímky *BH* do roviny *ACH* je přímka $S_{AC}H$ $\Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku *BFHD*.

Velikost úhlu φ můžeme spočítat pomocí kosinové věty z trojúhelníku $S_{AC}BH$ (trojúhelník nemá viditelné speciální vlastnosti $\Rightarrow$ musíme určit délky všech tří stran).



$|S_{AC}B| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (polovina úhlopříčky podstavy)

$|S_{AC}H|$: přepona v pravoúhlém trojúhelníku $S_{AC}DH$

$$|S_{AC}H|^2 = |DS_{AC}|^2 + |DH|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{2a^2}{4} + a^2$$

$$|S_{AC}H| = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$|BH|$: přepona v pravoúhlém trojúhelníku BFH

$$|BH|^2 = |BF|^2 + |FH|^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 2a^2$$

$$|BH| = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$\cos\varphi = \frac{|S_{AC}H|^2 + |BH|^2 - |S_{AC}B|^2}{2|S_{AC}H||BH|} = \frac{\left(a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\left(a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(a\sqrt{3}\right)} = \frac{a^2\left(\frac{3}{2} + 3 - \frac{1}{2}\right)}{2a^2\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \varphi = 19°28'$$

Odchylka přímky BH a roviny ACH se rovná $19°28'$.

Př. 5: Petáková:
strana 94/cvičení 33 a) c) d) h)
strana 94/cvičení 34 b) d)

Shrnutí: Odchylku přímku a roviny určujeme jako odchylku přímky a jejího kolmého průmětu do roviny.